# PART3　三角関数の相互関係

**例題**

(1)　$\theta$ が第３象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\theta$ が第４象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　　(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

**Point Pickup**

**練習**

(1) $\theta$ が第４象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\theta$ が第２象限の角で，$\tan\theta=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

# 第 8 講　PART3 確認問題

**1**　$\theta$ が第4象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin\theta=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \tan\theta=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

**2**　$\theta$ が第2象限の角で，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\sin\theta=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}},\quad \cos\theta=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}$$

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

**3**　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

**4**　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$

# PART3　三角関数の相互関係

**例題**

(1)　$\theta$ が第3象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\theta$ が第4象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

　(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

$\theta$ が第3象限の角であるから，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2)^2=5$　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\theta$ が第4象限の角であるから，$\cos\theta>0$　　よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(3)(i)　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ の両辺を2乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

(ii)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=-\frac{11}{16}$$

**練習**

(1)　$\theta$ が第４象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\theta$ が第２象限の角で，$\tan\theta=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$\theta$ が第４象限の角であるから，$\sin\theta<0$　よって　$\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\div\dfrac{1}{3}=-2\sqrt{2}$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-\sqrt{2})^2=3$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$\theta$ が第２象限の角であるから，$\cos\theta<0$　　よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-\sqrt{2})\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(3)(i)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を２乗すると，$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　より　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

(ii)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

# 第 8 講　PART3 確認問題 解答

## 1

**[正解]** アイ：$-4$，ウ：$5$，エオ：$-4$，カ：$3$

**[解説]**

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$\theta$ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\boldsymbol{\frac{4}{5}}$

これより

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\frac{3}{5}=-\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$ [B]

[A]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

[B]　三角関数の相互関係
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

## 2

**[正解]** キ：$1$，ク：$5$，ケコ：$-2$，サ：$5$

**[解説]**

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [C]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\theta$ が第 2 象限の角であるから，$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{4}{5}}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [D]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

[C]　三角関数の相互関係
$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

[D]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より
$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

**3** **[正解]** シ：4，ス：9

**[解説]**

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [E]

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

[E]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

**4** **[正解]** セソ：13，タチ：27

**[解説]**

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ であるから

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ [F]

$=(\sin\theta-\cos\theta)$

$\times\left(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)$ [G]

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\left(1+\dfrac{4}{9}\right)=\boldsymbol{\dfrac{13}{27}}$

[F]　$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

[G]　三角関数の相互関係
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$